Segunda-feira, 9 de Julho de 2018

Problema 1. Seja Γ o circuncírculo do triângulo acutângulo ABC. Os pontos D e E estão sobre os segmentos AB e AC, respectivamente, de modo que $AD = AE$. As mediatrizes de BD e CE intersectam os arcos menores AB e AC de Γ nos pontos F e G, respectivamente. Prove que as retas DE e FG são paralelas (ou são a mesma reta).

Problema 2. Determine todos os inteiros $n \geq 3$ para os quais existem números reais $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$, tais que $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ e

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Problema 3. Um *triângulo anti-Pascal* é uma disposição de números em forma de triângulo equilátero tal que, exceto para os números na última linha, cada número é o módulo da diferença entre os dois números imediatamente abaixo dele. Por exemplo, a seguinte disposição de números é um triângulo anti-Pascal com quatro linhas que contém todos os inteiros de 1 até 10.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Determine se existe um triângulo anti-Pascal com 2018 linhas que contenha todos os inteiros de 1 até $1 + 2 + \cdots + 2018$.

Language: Portuguese

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos

Terça-feira, 10 de Julho de 2018

Problema 4. Um *local* é um ponto (x, y) no plano tal que x e y são ambos inteiros positivos menores ou iguais a 20.

Inicialmente, cada um dos 400 locais está vazio. Ana e Beto colocam pedras alternadamente com Ana a iniciar. Na sua vez, Ana coloca uma nova pedra vermelha num local vazio tal que a distância entre quaisquer dois locais ocupados por pedras vermelhas seja diferente de $\sqrt{5}$. Na sua vez, Beto coloca uma nova pedra azul em qualquer local vazio. (Um local ocupado por uma pedra azul pode estar a qualquer distância de outro local ocupado.) Eles param quando um dos jogadores não pode colocar uma pedra.

Determine o maior K tal que Ana pode garantir que ela coloca pelo menos K pedras vermelhas, não importando como Beto coloca suas pedras azuis.

Problema 5. Sejam $a_1, a_2, \ldots$ uma sequência infinita de inteiros positivos. Suponha que existe um inteiro $N > 1$ tal que, para cada $n \geq N$, o número

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

é um inteiro. Prove que existe um inteiro positivo M tal que $a_m = a_{m+1}$ para todo $m \geq M$.

Problema 6. Um quadrilátero convexo $ABCD$ satisfaz $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. O ponto X está no interior de $ABCD$ de modo que

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{e} \quad \angle XBC = \angle XDA.$$

Prove que $\angle BXA + \angle DXC = 180°$.

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos