Montag, 9. Juli 2018

Aufgabe 1. Es sei Γ der Umkreis eines spitzwinkligen Dreiecks ABC. Punkte D und E liegen so auf den Strecken AB bzw. AC, dass $AD = AE$ gilt. Die Mittelsenkrechten der Strecken BD und CE schneiden die kürzeren Kreisbögen AB bzw. AC von Γ in den Punkten F bzw. G. Man beweise, dass die Geraden DE und FG parallel oder gleich sind.

Aufgabe 2. Man bestimme alle ganzen Zahlen $n \geq 3$, für die reelle Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_{n+2}$ existieren, so dass $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ und

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

für $i = 1, 2, \dots, n$ gelten.

Aufgabe 3. Ein *anti-Pascalsches Dreieck* ist eine gleichseitig dreieckige Anordnung von Zahlen in der, mit Ausnahme der Zahlen in der untersten Zeile, jede Zahl gleich dem Absolutbetrag der Differenz der beiden unmittelbar darunter stehenden Zahlen ist. Zum Beispiel ist die folgende Anordnung ein anti-Pascalsches Dreieck mit vier Zeilen, das jede ganze Zahl von 1 bis 10 enthält.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Existiert ein anti-Pascalsches Dreieck mit 2018 Zeilen, das jede ganze Zahl von 1 bis $1+2+\cdots+2018$ enthält?

Language: German

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.

Dienstag, 10. Juli 2018

Aufgabe 4. Ein *Knoten* ist ein Punkt (x, y) in der Ebene, für den sowohl x als auch y positive ganze Zahlen kleiner oder gleich 20 sind.

Zunächst ist jeder der 400 Knoten unbesetzt. Amy und Ben legen abwechselnd Steine auf die Knoten, wobei Amy beginnt. In jedem Zug von Amy legt sie einen neuen roten Stein so auf einen unbesetzten Knoten, dass der Abstand zwischen je zwei von roten Steinen besetzten Knoten ungleich $\sqrt{5}$ ist. In jedem Zug von Ben legt er einen neuen blauen Stein auf einen unbesetzten Knoten. (Ein Knoten, der von einem blauen Stein besetzt ist, darf einen beliebigen Abstand von jedem anderen besetzten Knoten haben.) Sie hören auf, sobald ein Spieler keinen Stein mehr legen kann.

Man bestimme das größte K, so dass Amy sicher mindestens K rote Steine legen kann, unabhängig davon, wie Ben seine blauen Steine legt.

Aufgabe 5. Es sei $a_1, a_2, \ldots$ eine unendliche Folge positiver ganzer Zahlen. Es sei angenommen, dass eine ganze Zahl $N > 1$ existiert, so dass für jedes $n \geq N$ die Zahl

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

ganz ist. Man beweise, dass es eine positive ganze Zahl M gibt, so dass $a_m = a_{m+1}$ für alle $m \geq M$ gilt.

Aufgabe 6. Ein konvexes Viereck $ABCD$ erfülle die Bedingung $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Ein Punkt X liege so im Inneren von $ABCD$, dass

$$\sphericalangle XAB = \sphericalangle XCD \quad \text{und} \quad \sphericalangle XBC = \sphericalangle XDA.$$

Man beweise, dass $\sphericalangle BXA + \sphericalangle DXC = 180^\circ$ gilt.

Language: German

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.